

# Chapitre 35

## Dénombrément

### Plan du chapitre

1	<b>Rappels sur le cardinal.</b>	1
2	<b>Introduction au dénombrement</b>	2
2.1	Principe multiplicatif et cardinal de $E \times F$	2
2.2	Principe de représentation et cardinaux de $F^E$ et de $\mathcal{P}(E)$	4
3	<b>Dénombrer avec l'ordre et la répétition</b>	5
3.1	$p$ -uplets : avec ordre et avec répétition	5
3.2	Arrangements : avec ordre et sans répétition	5
3.3	Combinaisons : sans ordre et sans répétition	6
4	<b>Principe additif et classification</b>	7
4.1	Cardinal et inclusion, union, différence ensembliste	7
4.2	Astuce : passer au complémentaire	8
4.3	Principe additif	9
5	<b>Cardinal de <math>f(E)</math></b>	10
6	<b>Méthodes pour les exercices.</b>	12

#### Hypothèse

$E$  et  $F$  désignent des ensembles **finis**.  
 $n \in \mathbb{N}$ .

### 1 Rappels sur le cardinal

Rappel : un ensemble  $E$  est dit fini s'il ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, on définit son cardinal comme étant ce nombre d'éléments, ce que l'on note

$$\text{card}(E) \quad \text{ou encore} \quad |E|$$

Si  $E$  possède une infinité d'éléments, on dit que c'est un ensemble infini.



La notation “ $\text{card}(E)$ ” n’a un sens que si  $E$  est de cardinal fini (tout comme  $\dim F$  n’a de sens que si l’e.v.  $F$  est de dimension finie).

- Exemple 1.**
- L’ensemble vide noté  $\emptyset$  est le seul ensemble avec 0 élément.
  - Le cardinal de  $\llbracket m, n \rrbracket$  est . . . . .

**Théorème 35.1**

$E$  et  $F$  sont dits en bijection s’il existe une bijection  $f$  de  $E$  sur  $F$ , et on notera  $E \simeq F$ . Il s’agit d’une relation d’équivalence sur les ensembles.

*Démonstration.*

Montrons que  $\simeq$  est une relation d’équivalence. Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles.

- $\text{id}_E : E \rightarrow E$  est une bijection, donc  $E \simeq E$  : la relation  $\simeq$  est réflexive.
- On suppose que  $E \simeq F$ . Alors il existe une bijection  $f$  de  $E$  sur  $F$ . L’application  $f^{-1}$  est alors une bijection de  $F$  sur

$E$  (avec  $(f^{-1})^{-1} = f$ ) si bien que  $F \simeq E$  : la relation est symétrique.

- On suppose que  $E \simeq F$  et  $F \simeq G$ . Il existe donc deux bijections  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$ . Dans ce cas,  $g \circ f$  est aussi une bijection de  $E$  sur  $G$ , d’où  $E \simeq G$  : la relation est transitive.

□

- $\text{card}(E) = n$  si et seulement si  $E \simeq \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- Si  $\text{card}(E) = n$ , alors on peut construire une application bijective :

$$\begin{aligned} \llbracket 1, n \rrbracket &\rightarrow E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

Se donner une telle application revient à choisir une numérotation des éléments de  $E$ . On peut alors écrire  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ . On dit qu’on a indexé les éléments de  $E$ , ou encore que l’application  $i \mapsto a_i$  est une indexation de  $E$ .

**Théorème 35.2**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Si  $\text{card}(E) = n$  et  $E \simeq F$ , alors  $F$  est fini et  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ .

## 2 Introduction au dénombrement

Dénombrer signifie essentiellement compter le nombre de cas possibles d’une situation donnée. La résolution de ces problèmes fera surtout appel à du bon sens et à reconnaître quelques situations-types. Bien comprendre les exemples et faire des exercices est donc essentiel !

Le dénombrement repose sur plusieurs principes et astuces, qui sont rappelés en fin de chapitre.

### 2.1 Principe multiplicatif et cardinal de $E \times F$

**Méthode – Principe des choix successifs (ou principe multiplicatif)**

Lorsque, pour dénombrer tous les cas possibles, on est amené à faire un choix parmi  $n_1$  possibilités, **puis** un autre parmi  $n_2$  possibilités, **puis** (...), **puis** un autre parmi  $n_k$  possibilités, il faut **multiplier** le nombre de possibilités à chaque étape, ce qui donne un total de  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  cas possibles.

**Exemple 2.** Un immeuble dispose d'un code d'entrée à quatre chiffres. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

**Exemple 3.** Soit  $n \geq 2$  un entier. Il y a  $n!$  permutations dans  $S_n$ .

**Théorème 35.3 – Produit cartésien**

(On suppose  $E$  et  $F$  finis). L'ensemble  $E \times F$  est fini et

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

Cela explique la notation  $E \times F$  car cette formule se réécrit  $|E \times F| = |E| \times |F|$ .

*Démonstration.* On pose  $n = \text{card}(E)$  et  $p = \text{card}(F)$ . Par indexations de  $E$  et de  $F$ , on peut poser  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$  et  $F = \{b_1, \dots, b_p\}$ .

□

**Remarque.** Une preuve formelle consisterait à construire une bijection de  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $E \times F$ , ce qui montrerait que ces deux ensembles sont de même cardinal. Mais une telle preuve formelle ne fait pas partie des attendus du programme.

**Remarque.** Plus généralement, si  $E_1, \dots, E_n$  sont finis, on a

$$|E_1 \times \dots \times E_n| = |E_1| \times \dots \times |E_n|$$

**Définition 35.4**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $p$ -uplet de  $E$  un élément de  $E^p$ , i.e. un élément de la forme

$$(a_1, \dots, a_p) \quad \text{avec } a_1, \dots, a_p \in E$$

**Théorème 35.5 – Nombre de  $p$ -uplets**

Si  $\text{card}(E) = n$ , alors  $\text{card}(E^p) = n^p$ . En particulier, il y a  $n^p$   $p$ -uplets de  $E$ .

*Démonstration.* En effet, le cardinal En particulier, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p$ . □

**2.2 Principe de représentation et cardinaux de  $F^E$  et de  $\mathcal{P}(E)$**

**Méthode – Principe de représentation**

Pour dénombrer une situation donnée, on peut **représenter** ce qu'on veut compter par un autre objet mathématique, et dénombrer ces objets à la place.

Il faut s'assurer que cette représentation est **bijective**, i.e. que chaque cas qui nous intéresse est représenté par un et un seul objet !

**Exemple 4.** Se donner un code à 4 chiffres revient à choisir un 4-uplet de l'ensemble  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ . Comme  $\text{card}(\llbracket 0, 9 \rrbracket^4) = 10^4$ , on dénombre  $10^4$  codes à 4 chiffres.

**Exemple 5.** Dans l'Exemple 3, pour calculer le cardinal de  $S_n$ , on s'est en fait servi de la bijection suivante :

$$\begin{aligned} S_n &\rightarrow D \\ \sigma &\mapsto (\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \end{aligned}$$

avec

$$D = \{(a_1, \dots, a_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_1, \dots, a_n \text{ distincts deux à deux}\}$$

Cette bijection nous a permis de *représenter* une permutation  $\sigma$  par un élément de  $D$  de manière bijective, et c'est l'ensemble  $D$  dont nous avons calculé le cardinal.

Rappel : on note  $F^E$ , ou encore  $\mathcal{F}(E, F)$ , l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

**Théorème 35.6 – Applications de  $E$  dans  $F$**

L'ensemble  $F^E$  est fini et

$$\text{card}(F^E) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$$

Cela explique la notation  $F^E$  : en effet  $|F^E| = |F|^{|E|}$ . Attention à l'ordre ! En général,  $|F|^{|E|} \neq |E|^{|F|}$  : par exemple  $2^3 = 8$  mais  $3^2 = 9$ .

*Démonstration.* On pose  $n = \text{card}(E)$  et  $m = \text{card}(F)$ . Par indexations de  $E$  et de  $F$ , on peut poser  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$  et  $F = \{b_1, \dots, b_m\}$ . □

**Théorème 35.7 –  $\mathcal{P}(E)$**

L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  est fini et

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$$

*Preuve informelle.* On pose  $n = \text{card}(E)$ . Si  $n = 0$ , alors  $E = \emptyset$  et donc  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$  est bien de cardinal  $2^0 = 1$ . Si  $n \geq 1$ , alors par indexation de  $E$ , on peut poser  $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

□

### 3 Dénumérer avec l'ordre et la répétition

#### 3.1 $p$ -uplets : avec ordre et avec répétition

Rappel : étant donné  $p \in \mathbb{N}^*$ , on appelle  $p$ -uplet de  $E$  un élément de  $E^p$ , qui sera donc une famille de la forme  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  avec  $a_1, \dots, a_p \in E$ .

- L'ordre compte :  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_p) \neq (a_2, a_1, a_3, \dots, a_p)$
- Il est possible de prendre plusieurs fois le même élément, par exemple  $(a_1, a_1, \dots, a_1)$ .

Les  $p$ -uplets sont donc adaptés pour les dénombrements lorsque **l'ordre compte** et lorsque **la répétition est possible**, typiquement :

- Nombre de mots de passe avec  $n$  caractères.
- Nombre de tirages avec remise.

#### 3.2 Arrangements : avec ordre et sans répétition

##### Définition 35.8 – $p$ -arrangement

Soit  $p \in \llbracket 1, \text{card}(E) \rrbracket$ . On appelle  $p$ -arrangement tout  $p$ -uplet  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  de  $E$  dont les éléments  $a_1, \dots, a_p$  sont distincts.

Les **arrangements** sont donc adaptés pour les dénombrements lorsque **l'ordre compte** et lorsqu'il n'y a **pas de répétition** possible

Par convention, on considère que  $E$  possède un unique 0-arrangement de  $E$  : la famille vide.

##### Théorème 35.9

On suppose  $E$  de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$  est donné par

$$\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \cdots (n-p+1)$$

Le nombre de  $p$ -arrangements est parfois noté  $A_n^p$  ou encore  $\text{Arr}(n, p)$ . Il n'y a pas de notation officielle. On remarque qu'avec  $p = 0$ , la formule ci-dessus est en accord avec la convention qu'il existe un et un seul 0-arrangement de  $E$  (la famille vide).

*Démonstration.* Le cas  $p = 0$  est réglé par convention. Pour le reste, la démonstration suit la même logique que l'exemple ci-dessous.  $\square$

**Exemple 6.** Une classe de 27 étudiants se répartissent dans un amphi de 50 places. Combien de dispositions différentes peut-on obtenir ?

Plutôt que de raisonner élève par élève, aurait-on pu raisonner place par place pour résoudre ce problème ? Un étudiant propose la réponse suivante. Qu'en pensez-vous ?

*L'amphi fait 50 places, mais on peut se limiter aux 27 places qui vont être prises par les étudiants. Pour la première de ces 27 places, il y a 27 choix possibles, puis pour la suivante il y a 26 choix, etc. jusqu'à la dernière place où il ne reste plus qu'un choix. On obtient donc un total de  $27!$  possibilités.*

**Remarque.** Si  $\text{card}(E) = n$ , alors se donner un  $n$ -arrangement de  $E$  revient à se donner une permutation de  $E$ . On retrouve ainsi que  $\text{card}(S_n) = A_n^n = n!$ .

**Exemple 7.** Combien d'anagrammes du mot MATHS peut-on faire ?

### 3.3 Combinaisons : sans ordre et sans répétition

#### Définition 35.10

On suppose  $E$  de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On appelle  $p$ -combinaison de  $E$  tout sous-ensemble de  $E$  avec  $p$  éléments (nécessairement distincts).

Les **combinaisons** sont donc adaptées pour les dénombrements lorsque **l'ordre ne compte pas** et lorsqu'il n'y a **pas de répétition** possible.

**Exemple 8.**  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$  et  $\{3, 2, 1\}$  représentent la même 3-combinaison.

**Théorème 35.11**

On suppose  $E$  de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le nombre total de  $p$ -combinaisons de  $E$  est  $\binom{n}{p}$ .

*Idée de la preuve.* À toute  $p$ -combinaison  $\{a_1, \dots, a_p\}$  on peut lui associer un total de  $p!$  arrangements distincts  $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(p)})$  avec  $\sigma \in S_p$ . Comme  $\text{card}(S_p) = p!$ , il y a donc  $p!$  “fois plus” de  $p$ -arrangements que de  $p$ -combinaisons. Ainsi, le nombre  $N$  de  $p$ -combinaisons de  $E$  vérifie  $N \times p! = \frac{n!}{(n-p)!}$ , si bien que  $N = \binom{n}{p}$ .  $\square$

**Exemple 9.** Combien de mains de 5 cartes peut-on obtenir avec un jeu de 52 cartes ?

**Exemple 10.** Une classe de 27 élèves souhaite élire deux délégué(e)s et deux suppléant(e)s. Combien de combinaisons possibles peut-on réaliser ?

## 4 Principe additif et classification

### 4.1 Cardinal et inclusion, union, différence ensembliste

**Théorème 35.12 – Inclusion**

Soit  $A$  un ensemble tel que  $A \subset E$ . Alors  $A$  est un ensemble fini et  $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$   
De plus, si  $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ , alors  $A = E$ .

Comme pour les s.e.v., si on veut montrer que deux ensembles finis sont égaux, il est suffisant de montrer que l’un est inclus dans l’autre et que leurs cardinaux sont égaux.

**Théorème 35.13 – Union**

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On a :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

En particulier, si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ . Cette formule se généralise à  $n$  sous-ensembles finis  $A_1, \dots, A_n$  disjoints deux à deux :

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{card}(A_1) + \dots + \text{card}(A_n)$$

Un dessin suffit pour se convaincre de la formule du Théorème 35.13 :

Si  $A$  est un sous-ensemble de  $E$ , on notera  $\bar{A} := E \setminus A$  son complémentaire (la notation  $A^c$  existe aussi)

**Théorème 35.14 – Différence ensembliste**

Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ . On a :

$$\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(B \cap A)$$

En particulier, avec  $B = E$ , on obtient :

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$$

À nouveau, on peut se convaincre de la première formule par un dessin, cf ci-dessus.

**4.2 Astuce : passer au complémentaire****Méthode – Passer au complémentaire**

Il est parfois plus simple de dénombrer les cas qu'on ne souhaite pas compter pour en déduire le dénombrement des cas que l'on souhaite.

Ce principe repose sur le Théorème 35.14. Elle sert typiquement quand l'énoncé contient les mots "au moins un(e)".

**Exemple 11.** Combien y a-t-il de codes à 4 chiffres avec au moins une fois le chiffre 7 ?

### 4.3 Principe additif

#### Méthode – Découpage en catégories (ou principe additif)

Lorsqu'on souhaite dénombrer tous les cas possibles, on est parfois amené à regrouper ces cas en plusieurs catégories **disjointes**, typiquement avec la formule **soit (...), soit (...), soit (...)**, etc.

Dans ce cas, on peut dénombrer chaque catégorie séparément et faire la **somme** de leurs cardinaux pour obtenir le nombre total de cas.

Ce principe repose sur la propriété que, si  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ . Les sous-ensembles  $A$  et  $B$  représentent les catégories disjointes de la méthode ci-dessus.

**Exemple 12.** Combien de codes à 4 chiffres possèdent exactement une fois le chiffre 7 ?

#### Méthode – Classification

Pour dénombrer des cas, il est extrêmement utile de **classifier** les cas en question, en les regroupant en catégories (cf méthode précédente) ou encore de se donner un **ordre fictif** qui permet de choisir selon le principe multiplicatif.

**Exemple 13.** Avec un jeu de 52 cartes, on distribue des mains de 5 cartes. Combien de mains possèdent exactement 3 cartes de même valeur ?

**Exemple 14.** Combien d'anagrammes du mot CARAMBAR peut-on faire ?

## 5 Cardinal de $f(E)$

### Lemme 35.15

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors  $\text{card}(f(E)) \leq \text{card}(E)$ . De plus :

- $f$  est injective si et seulement si  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$
- $f$  est surjective si et seulement si  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$

**Théorème 35.16**

On suppose que  $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ . Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors

$f$  est injective ssi  $f$  est surjective ssi  $f$  est bijective

*Démonstration.* Par le théorème précédent, on a :

$f$  est injective ssi  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E)$  ssi  $\text{card}(f(E)) = \text{card}(F)$  ssi  $f$  est surjective

et l'équivalence avec “ $f$  est bijective” découle de la première équivalence. □

## 6 Méthodes pour les exercices

### Méthode – Récapitulatif des méthodes

Lorsqu'on cherche à dénombrer tous les cas possibles :

- Reconnaître les situations types des  $p$ -uplets, des arrangements et des combinaisons.
- Principe multiplicatif : si on fait un choix, **puis** un autre, **puis** un autre, etc. on doit **multiplier** le nombre de choix possibles à chaque étape.
- Principe additif : si on découpe les choix à faire en plusieurs catégories **disjointes**, avec la formule **soit (...), soit (...), soit (...)**, il faut **additionner** le nombre de choix possibles à chaque étape.
- On peut éventuellement créer ses propres catégories, cela revient à **classifier** ce qu'on veut compter, ou encore définir un **ordre fictif**.
- Il est parfois plus simple de passer au **complémentaire** pour en déduire un dénombrement des cas souhaités.
- Enfin, il est parfois nécessaire de choisir une **représentation** bijective de ce qu'on veut compter par des objets plus faciles à dénombrer.